



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado
Primeiro Semestre de 2017

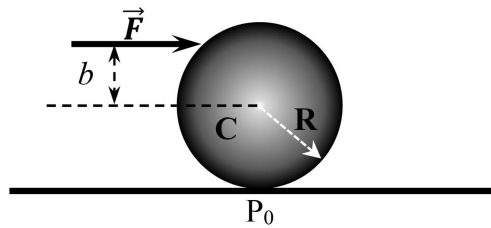
Mecânica Clássica

10/03/2017 - 09:00 às 12:00 h

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – ROLAMENTO

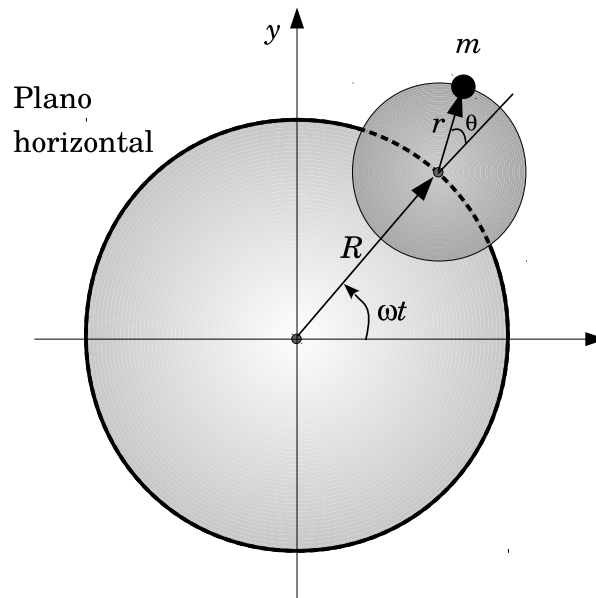
Uma bola de bilhar esférica com massa m e raio R está inicialmente em repouso sobre a superfície horizontal de uma mesa. No instante $t = 0$, a ponta de um taco atinge a bola em um ponto localizado a uma altura b acima da linha horizontal que passa pelo seu centro C , exercendo uma força F na bola durante um intervalo de tempo muito curto Δt . Os coeficientes de atrito cinético e estático entre a superfície da mesa e a bola são μ_c e μ_e , respectivamente.



- (a) (10%) Mostre que o momento de inércia da bola de bilhar em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa (CM) é dado por $I_C = (2/5)mR^2$.
- (b) (30%) Imediatamente após o taco atingir a bola, a mesma adquire uma velocidade de translação do CM de v_0^{CM} e de rotação em torno do CM de ω_0^{CM} . Determine a razão v_0^{CM}/ω_0^{CM} nesta condição. Mostre que o rolamento puro ocorre se o taco atingir a bola na posição $b = (2/5)R$. Neste item o atrito é desprezível, pois no intervalo de tempo Δt , $F \gg f_{\text{atrito}}$.
- (c) (40%) Suponha agora que o taco atinge a bola ao longo da linha que passa pelo seu centro (isto é, $b = 0$). Imediatamente após o taco atingir a bola, a mesma desliza sem girar com velocidade inicial de translação do CM igual v_0 e velocidade inicial de rotação em torno do CM nula. Devido ao atrito cinético a bola vai adquirindo um movimento de rotação até atingir o rolamento puro. Calcule: (i) o intervalo de tempo que a bola leva para atingir o movimento de rolamento puro; (ii) a distância percorrida pela bola neste intervalo de tempo.
- (d) (20%) Calcule a fração numérica da energia cinética total que é transformada em calor desde o instante inicial até o momento que a bola atinge o movimento de rolamento puro.

QUESTÃO 2 – MECÂNICA LAGRANGEANA

Uma partícula de massa m está fixa na borda de um disco de raio r , veja a figura. Este disco pode girar livremente em torno de um eixo que passa pelo seu centro e se encontra na borda de um segundo disco de raio R . O disco de raio R gira em torno de seu centro com velocidade angular constante ω . Os discos têm massa desprezível e se encontram em um plano horizontal.



- (a) (10%) Escreva as coordenadas da partícula no sistema cartesiano indicado na figura em termos da coordenada θ , ângulo entre o vetor de módulo r e o vetor de módulo R indicados na figura, e do tempo t . Admita que em $t = 0$ o centro do disco de raio r se encontra sobre o eixo x positivo.

- (b) (40%) Mostre que o lagrangeano da partícula é dado por

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 + \frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta} + \omega)^2 + mrR\omega(\dot{\theta} + \omega) \cos \theta$$

- (c) (40%) Encontre a equação de movimento da coordenada θ .

- (d) (10%) Determine a frequência de pequenas oscilações de θ em torno da posição de equilíbrio.
-

QUESTÃO 3 – POTENCIAL CENTRAL

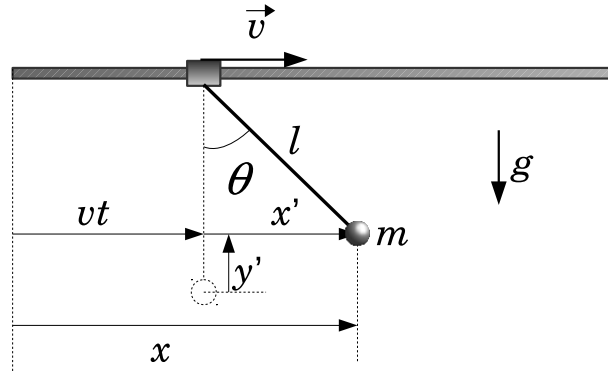
Suponha uma partícula de massa m que se move em um potencial central $V(r) = -k/r$, onde k é uma constante positiva.

- (a) (40%) Mostre que o movimento da partícula só depende das variáveis r e θ . Escreva a Hamiltoniana deste sistema e determine as integrais do movimento. Em particular, calcule a frequência do movimento para uma órbita circular de raio r_0 .
- (b) (40%) Suponha que o raio da órbita circular r_0 sofra uma pequena perturbação. Expanda o potencial efetivo em série de Taylor e mostre que a partícula descreve um movimento harmônico simples em torno de r_0 . Determine a frequência de oscilação radial deste movimento. Mostre que esta frequência é igual à frequência do movimento circular calculada no item (a). Sugestão: faça $r = r_0 + \varepsilon$, onde $r_0 \gg |\varepsilon|$.
- (c) (20%) Suponha que o potencial $V(r)$ é do tipo Yukawa, $V(r) = \frac{-a}{r}e^{-br}$, onde a e b são constantes. Determine para que valores de r as órbitas circulares são estáveis.
-

QUESTÃO 4 – MECÂNICA HAMILTONIANA

Um pêndulo simples consiste em uma partícula de massa m presa na extremidade de uma barra rígida de massa desprezível e comprimento l . O suporte do pêndulo, de massa desprezível, se move com velocidade v constante ao longo de uma haste horizontal, veja a figura, pela ação de uma força variável (não indicada na figura). A haste se encontra no plano de oscilação do pêndulo; e não há atrito entre o suporte do pêndulo e a haste.

Sejam x a coordenada horizontal da partícula em relação à extremidade esquerda da haste, x' a coordenada horizontal em relação ao suporte, y' a coordenada vertical em relação ao nível mais baixo da partícula e g a aceleração de queda livre, veja a figura.



- (a) (40%) Mostre que para pequenas oscilações, $|\theta| \ll 1$ rad e $\dot{y}' \approx 0$, a lagrangeana da partícula na coordenada $x'(t)$ é dada por

$$L(x', \dot{x}') = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + m\dot{x}'v - \frac{mg}{2l}x'^2 \quad (1)$$

- (b) (40%) Determine a hamiltoniana $H(x', p_{x'})$ em termos das coordenadas x' e $p_{x'}$, onde $p_{x'}$ é o momento conjugado da partícula em relação a x' ; e a hamiltoniana $H(x, p_x)$ em termos das coordenadas x e p_x . Discuta se $H(x', p_{x'})$ ou $H(x, p_x)$ são constantes de movimento.
- (c) (20%) Admita que $x'(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$, com x_m e ϕ constantes, enquanto que $\omega = \sqrt{g/l}$. Encontre a taxa com que a força que age no suporte realiza trabalho.